

Poznání zrozené ze zoufalství Několik poznámek k počátkům kvantové teorie

Jiří Chýla, Fyzikální ústav Akademie věd ČR, chyla@fzu.cz

*Pokrok ve vědě jde často daleko složitějšími cestami, než jak se o tom dočítáme v knihách o historii vědy. To platí zvláště o teoretické fyzice, částečně proto, že dějiny píší vítězové. Historikové často ignorují různé cesty, jimiž se vývoj ubíral, mnohé falešné stopy po nichž fyzikové šli a všechny chybné představy, jež měli. Četbou historických pramenů jen vzácně získáme správnou představu o skutečné podstatě vědeckého pokroku, do něhož patří fraška stejně jako triumf. Vznik a vývoj kvantové chromodynamiky je krásný příklad vývoje od frašky až k triumfu. **David Gross, laureát Nobelovy ceny za fyziku v roce 2004***

Citát z přednášky, kterou David Gross přednesl v roce 1998 na konferenci o historii fyziky, vystihuje nejen cestu, kterou se v uplynulých zhruba padesáti letech ubíraly snahy fyziků pochopit strukturu hmoty a zákonitosti, jimiž se její základní stavební kameny řídí, ale lze ho použít i na okolnosti vzniku samotné kvantové teorie na přelomu 19. a 20. století.

Tento citát uvádím proto, že v řadě knih, odborných i populárních, jsou okolnosti, jež vedly ke vzniku kvantové teorie překrouceny, mnohdy až k nepoznání. Klikatá, ale vzrušující cesta ke kvantové teorii, provázená řadou omylů a nepochopení, na níž se přesně hodí Grossova charakterizace, je zaměňována za pohádku, jež často slouží jen k potvrzení autorových názorů. Tak je tomu například v knize Briana Greenea *Elegantní vesmír*, věnované teorii strun, kde jsou důvody vedoucí k formulaci kvantové teorii líčeny slovy:

Na začátku 20. století fyzikové spočítali celkovou energii elektromagnetického záření uvnitř dutiny dané teploty. Použitím osvědčených výpočetních metod došli ke směšnému závěru: pro každou teplotu je celková energie uvnitř dutiny nekonečná. Všem bylo jasné, že to byl nesmysl – v horké dutině může být hodně energie, ale jistě ne nekonečno.

po nichž následuje dlouhé povídání o tom, jak interpretujeme výraz, který odvodil Planck, v rámci dnešní teorie. Ve skutečnosti nic nemůže být vzdálenější pravdě, proč a jak se myšlenka, že energie je „kvantovaná“, zrodila a kdo k ní přispěl, než právě uvedený citát. Planck sám na zrod kvantové teorie, k němuž tak zásadním způsobem přispěl, ve své Nobelovské přednášce v červnu roku 1920 vzpomíná takto:

Když pohlížím zpět na dobu před dvaceti lety, kdy se pojem a velikost kvanta akce začínal rodit z množství experimentálních skutečností a na dlouhou a křivolakou cestu, která nakonec vedla k jeho odhalení, zdá se mi, že celý tento vývoj jen ilustruje Goethova slova „Tvor lidský bloudí, pokud za čím spěje“ (z Prologu k Faustovi v překladu O. Fischera, pozn. J.Ch.). A veškeré vědcovo úsilí by se nakonec jevilo jako marné a beznadějně, kdyby se mu po všem tom pachtění občas nepodařilo udělat aspoň jeden krůček prokazatelně směřující k pravdě.

V tomto článku se pokusím vylíčit hlavní experimentální skutečnosti, jež tehdejší fyziky donutily opustit „hrací plochu“ klasické fyziky a jež vedly k formulaci teoretického rámce, jež se někdy říká „stará kvantová teorie“. Náš příběh skončí těsně před vznikem „nové“ kvantové mechaniky, spojované s Heisenbergovými relacemi neurčitosti a Schrödingerovou vlnovou rovnicí. Domnívám se totiž, že klíčové kroky při změně pohledu na mikrosvět byly učiněny již v rámci „staré“ kvantové teorie. „Nová“ kvantová mechanika k nim přidala mocný matematický aparát, jenž ovšem může zájemcům o kvantovou fyziku zastínit prvotní příčiny, proč bylo nutno klasickou teorii při popisu atomů opustit. Při diskuzi o kvantové mechanice se obvykle pozornost soustřeďuje na interpretaci vlnové funkce, dualitu vlnového a částicového popisu objektů mikrosvěta a na obsah pojmu kauzalita. Řada fyziků se dodnes nedokáže smířit se skutečností, že v mikrosvětě základní pojmy a zákonitosti klasické fyziky použít

nelze a snaží se najít teorii, která by se k nim vrátila. Takové snahy nejsou nesmyslné, jen je třeba mít stále na paměti, že každá taková alternativní teorie musí být schopna vysvětlit jevy, jejichž pochopení stálo na počátku cesty k současné kvantové teorii. A to se zatím žádné nepodařilo.

Jsem si vědom, že bez aktivní znalosti termodynamiky a statistické fyziky mohou být některá místa textu, zvláště diskuse Planckova odvození jeho vyzařovacího zákona, obtížně srozumitelná. Přesto jsem je zařadil, abych ukázal jaký typ úvah Plancka na jeho cestě ke kvantu vedl.

Náš příběh začíná v polovině 19. století a je proto užitečné připomenout, že tehdejší představy o struktuře hmoty se příliš nelišily od představ některých antických filosofů, jako byl například Epicurus. Ten již na přelomu 3. a 4. století před Kristem hlásal názor, že hmota se skládá z nejmenších, dále již nedělitelných částí, tedy atomů. Ne všichni Epicurovi současníci však jeho názor sdíleli a ani na počátku 19. století nebyli zdaleka všichni učenci o realitě atomů přesvědčeni. Důležitou roli při prosazování myšlenky atomismu hmoty sehrál britský chemik John Dalton, jenž je považován za zakladatele moderní chemie.

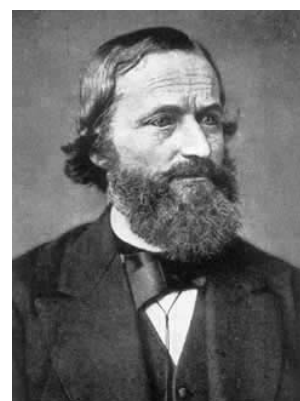
Klid před bouří



Ludwig Boltzmann
(1844-1906)

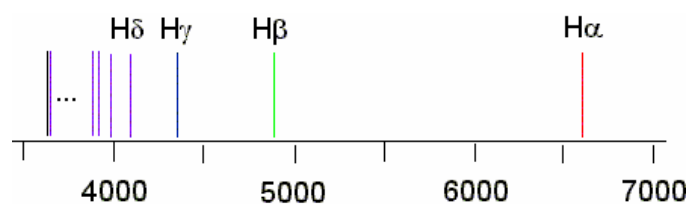
Druhá polovina 19. století byla ve fyzice ve znamení rozvoje termodynamiky a formulace dvou nových teorií: statistické fyziky a elektrodynamiky. První je spojena především se jménem Ludwiga Boltzmann (1844-1906) a druhá byla dílem Jamese Clerka Maxwella (1831-1879), jenž vycházel z Faradayových experimentálních studií elektrických a magnetických jevů. Jejich stěžejní práce, pocházející v obou případech z počátku 70. let 19. století, představovaly fundament, na němž kvantová teorie vyrostla. Klíčový význam statistické fyziky spočíval v tom, že tato teorie důsledně pracovala s atomy a molekulami jako základními entitami, což ani koncem 19. století nebylo zcela běžné.

Počátek cesty ke kvantu je spojen se jménem Gustava Kirchhoffa, jenž v roce 1859 formuloval pojem absolutně černého tělesa a dokázal, že spektrální rozdělení elektromagnetického záření vyzařovaného takovým tělesem závisí pouze na jeho teplotě. Experimentální zkoumání tohoto spektra, doprovázené snahami odvodit jeho tvar na základě tehdejších představ o struktuře hmoty, zaměstnávalo fyziky následujících 40. let. Přitom dlouho nic nenasvědčovalo tomu, že právě tento problém povede k nutnosti opustit pro popis zákonitostí mikrosvětla klasickou fyziku.



Gustav Kirchhoff
(1824-1887)

Díváme-li se zpět, je zřejmé, že prvním projevem kvantové povahy mikrosvětla bylo pozorování diskrétních spekter vyzařovaných za-



Obr. 1. Část Balmerovy série ve viditelné části spektra záření vodíku. Vlnové délky jsou uvedeny v Angströmech, přičemž 1Å=0.1 nanometru.

hřátými plyny. Již v roce 1871 pozoroval Angström v optickém oboru záření vodíku čtyři ostré spektrální čáry, odpovídající vlnovým délkám 410, 434, 486 a 656 nm. Protože ovšem v té době byly atomy považovány za skutečně nedělitelné a nikdo neměl představu, jak k vyzařování dochází, nevzbuzovala diskrétnost

spektra vodíku žádný údiv ani podezření. V roce 1885 si Johann Balmer, učitel matematiky na dívčím gymnáziu v Basileji, všiml, že uvedené vlnové délky lze vyjádřit v jednoduchém tvaru

$$\lambda = \kappa \frac{m^2}{m^2 - n^2} \quad (1)$$

kde κ je konstanta, přičemž $n=2$ a $m=3,4,5,6$. Na základě tohoto vztahu Balmer předpověděl další čáru, odpovídající $m=7$, jež byla krátce na to skutečně pozorována v infračervené oblasti. Balmerova formule byla na světě, ale nikdo nevěděl, proč platí. O tři roky později Robert Rydberg ukázal, že má obecnější platnost a přepsal ji do tvaru, v jakém se používá dodnes

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (2)$$

kde R je tzv. Rydbergova konstanta. Ani pak jí však nikdo nerozuměl, dokud nepřišel o čtvrt století později Niels Bohr se svým modelem atomu. Mezi tím se ovšem fyzikou zcela neočekávaně přehnala bouře, jež zacloumala jejími samotnými základy.

Skruté kvantum



Wilhelm Wien
(1864-1928)

Snaha spočíst spektrální hustotu záření absolutně černého tělesa $u(\nu, T)$ - tedy hustotu elektromagnetické energie připadající na jednotky objemu a frekvence - přivedla v roce 1893 Wiena k formulaci tzv. posunovacího zákona, jenž postihoval základní rys závislosti $u(\nu, T)$

$$u(\nu, T) = \nu^3 f(\nu / T) \quad (3)$$

kde $f(\nu / T)$ je neznámá funkce podílu frekvence a teploty. Tento tvar zajišťoval, že celkové množství energie vyzařované absolutně černým tělesem je úměrné čtvrté mocnině teploty, tak jak bylo pozorováno experimentálně. Zbývalo najít funkci $f(\nu / T)$. V té době ovšem neexistovaly žádné experimentálně podložené představy, jak elektromagnetické záření v látkách vzniká. Byla tu Maxwelllova teorie, ale nebylo jasné, jak ji k tomuto účelu použít. Atomy byly v té době považovány za dále nedělitelné objekty a na průlom do zkoumání struktury atomů,

jenž přinesl objev elektronu v roce 1897, fyzika teprve čekala.

Přesto v červenci 1896 Wien odvodil, vycházející z myšlenek Boltzmanovy statistické fyziky a předpokladu, že pohybující se atomy emitují záření o frekvenci, jež je funkcí jejich rychlosti, konkrétní tvar funkce $f(\nu / T)$, jenž respektoval (3)

$$u(\nu, T) = \alpha \nu^3 \exp(-\beta \nu / T) \quad (4)$$

kde α a β jsou konstanty. Tento jeho zákon byl prakticky okamžitě potvrzen prvními dostatečně přesnými měřeními Paschena a stal se na zhruba 3 roky nedílnou součástí výzbroje tehdejší teoretické fyziky. Jak dále uvidíme, tento zákon představuje krásnou ilustraci toho, jak lze chybným způsobem dospět ke správnému výsledku. Z dnešního hlediska se jeví Wienovy předpoklady nesmyslné, ale pro další vývoj bylo podstatné, že vedly ke shodě s experimentem. Navíc, a to je mimořádně zajímavé a hluboce ironické, ačkoliv Wien svůj zákon odvodil v rámci klasické fyziky, jevy, které správně popisoval, byly ve své podstatě neklasické. Jinými slovy, až do konce roku 1900 nikdo netušil, že **spektrální hustota záření absolutně černého tělesa, kterou tak dobře popisoval Wienův zákon, v sobě skrývá kvantovou fyziku!**

Netušil to ani Max Planck, teoretický fyzik, jehož hlavní výzbrojí byla hluboká znalost termodynamiky a přesvědčení o klíčové roli její druhé věty. Při její formulaci Planck vycházel



Max Planck (1858-1947)
ve věku 20 let.

z pojmu entropie a princip jejího růstu považoval za jeden z nehlubších fyzikálních zákonů. Nebyl ovšem přívržencem Boltzmannovy statistické fyziky a tedy ani pravděpodobnostní interpretace entropie. Planck se při svých úvahách opíral o Maxwellovu teorii elektromagnetismu a podrobně rozpracoval vzájemné působení elektromagnetického záření a tzv. Hertzova oscilátoru, elektrického dipólu kmitajícího s frekvencí ν . Počátkem roku 1899 odvodil vztah mezi hustotou $u(\nu, T)$ elektromagnetického záření, jež se v dutině ustavilo v důsledku vzájemného působení s Hertzovým oscilátorem a časovou střední hodnotou $E(\nu, T)$ jeho energie

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} E(\nu, T) \quad (5)$$

čímž převedl problém nalezení $u(\nu, T)$ na otázku výpočtu energie $E(\nu, T)$ oscilátoru. Wienův posunovací zákon (3) implikuje v kombinaci s výrazem (5) vztah $E(\nu, T)/\nu = f(\nu/T)$, což znamená, že podíl ν/T lze vyjádřit jako funkci podílu E/ν . Závislost $E(\nu, T)$ na teplotě je přitom určena rovnicí, v níž vystupuje entropie oscilátoru $S(E/\nu)$

$$\frac{1}{T} = \frac{dS(E/\nu)}{dE} \quad (6)$$

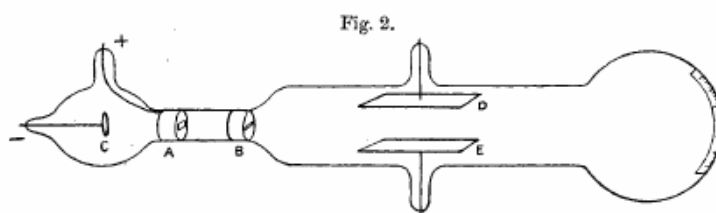
Řešení problému záření absolutně černého tělesa tak Planck redukoval na úlohu určení závislosti entropie Hertzova oscilátoru na jeho energii.

Objev elektronu

Průkopnické Faradayovy výzkumy elektromagnetických jevů interpretoval v roce 1881 Herman von Helmholtz slovy, jež předznamenala další vývoj:

Jestliže přijmeme hypotézu, že elementární látky jsou složeny z atomů, nemůžeme se vyhnout závěru, že také elektrina, kladná i záporná, je rozdělena na elementární porce, které se chovají jako atomy elektřiny.

Pro tyto „porce elektřiny“ přitom již v roce 1874 navrhl irský fyzik Stoney název „elektron“.



The rays from the cathode C pass through a slit in the anode A, which is a metal plug fitting tightly into the tube and connected with the earth; after passing through a second slit in another earth-connected metal plug B, they travel between two parallel aluminium plates about 5 cm. long by 2 broad and at a distance of 1.5 cm. apart; they then fall on the end of the tube and produce a narrow well-defined phosphorescent patch. A scale pasted on the outside of the tube serves to measure the deflexion of this patch.

Obr. 2: Originální obrázek s popisem katodové trubice, jíž Thomson použil v roce 1897 při zkoumání vlastností katodového záření.

V roce 1897 zkoumal J. J. Thomson vlastnosti katodového záření a zjistil, že se jedná o proud elektricky nabitých částic, jejichž hmotnost je podstatně menší než hmotnost atomů vodíku (v původním měření 770 krát, později Thomson tuto hodnotu zpřesnil na 1700). Thomson, jenž těmto částicím říkal „korpuskule“ i když všichni ostatní přijali název „elektron“, nebyl sice jediný, kdo prováděl podobná měření, ale jako jediný měl odvahu jejich výsledky interpretovat jako svědectví o existenci nové částice. První krok

na cestě k objevu struktury atomu byl učiněn.

Vítr se zvedá

V polovině roku 1899 Planck dokončil rozsáhlou práci, v níž ukázal, že Wienův zákon plyne z Maxwellovy teorie a druhé věty termodynamické aplikované na systém zářících resonátorů dané frekvence pokud za entropii jednoho oscilátoru vezmeme

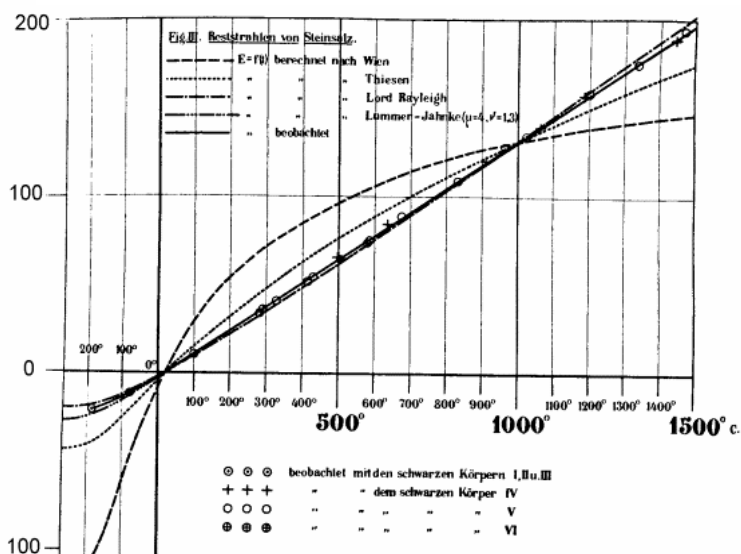
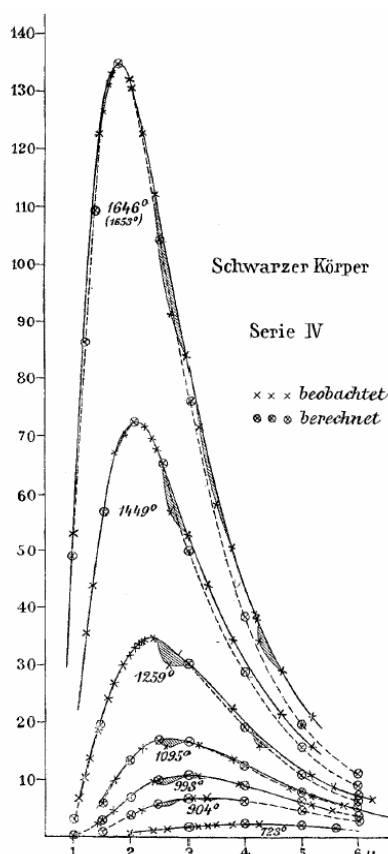
$$S(E/\nu) = -k \frac{E}{h\nu} \ln \frac{E}{h\nu} \quad (7)$$

kde h a k jsou v dnešní notaci Planckova a Boltzmannova konstanty. Planck se navíc domníval, že princip růstu entropie vede přímo na tvar (7) a že tedy Wienův zákon je jeho přímým důsledkem. Při svých úvahách došel k názoru, že klíčovou roli při ustavení termodynamické rovnováhy mezi zářením a resonátorem hraje druhá derivace entropie, jež má pro (7) velmi jednoduchý tvar ($\beta = h/k$)

$$\frac{d^2 S}{dE^2} = -\frac{1}{\beta\nu E} \quad (8)$$

Jednoduchost tohoto výrazu Planck považoval, jak dnes víme mylně, za signál správnosti..

Brzy poté se však objevily první náznaky, že Wienův zákon neplatí pro všechny frekvence a teploty. V září 1899 Lummers a Pringsheim ukázali, že při vlnových délkách několika mikronů a teplotách nad 1500 stupňů byla jejich měření o trochu, ale systematicky (viz. grafy na obr. 3 vlevo), nad předpovědí Wienovy formule. Planck byl ovšem o správnosti Wienovi for-



Obr. 3: Vlevo: první výsledky Lummerse a Pringsheima ukazující, že experimentální data (křížky „beobachtet“ proložené plnou křivkou) leží pro větší vlnové délky a vyšší teploty nad výpočty (kroužky „berechnet“) založenými na Wienově formuli (4). Vpravo: Měření Kurlbauma a Rubense v oblasti vlnových délek 20-30 μm (různé typy kroužků) odklon od Wienovy formule (čárkovaná křivka) jasně potvrdily.

mule přesvědčen tak skálopevně, že na tento signál reagoval tím, že se na jaře roku 1900 pokusil dokázat, že tvar výraz (7) pro entropii oscilátorů je skutečně přímým důsledkem principu růstu entropie. Nebudu zacházet do podrobností, jen připomenu, že pro důkaz tohoto tvrzení Planck potřeboval právě platnost vztahu (8) pro druhou derivaci.

Váhavý revolucionář

V září téhož roku ovšem vítr přerostl v bouři. Nová měření Kurlbauma a Rubense v oboru vlnových délek 20-30 mikronů totiž ukázala (viz. obr. 3 vpravo), tentokrát nade vší pochybnost, že Wienův zákon je v této oblasti v hrubém rozporu s experimentem. Planck musel změnit názor a opustit představu, že růst entropie vede automaticky na (8). To, co udělal byla jednoduchá modifikace předchozího postupu, v němž jen nahradil vztah (8) obecnějším tvarem

$$\frac{d^2 S}{dE^2} = -\frac{1}{\beta v} \frac{\gamma}{E(E + \gamma)} \quad (9)$$

jenž pro $E \ll \gamma$ na (8) přechází. Sám o tom, jak dospěl k výrazu (9) napsal

Ve svých úvahách jsem se nakonec rozhodl konstruovat zcela libovolné výrazy pro entropii, jež byly sice složitější, než výraz vedoucí na Wienovu formuli, ale které se zdály vyhovovat všem požadavkům vyplývajícím z teorií elektromagnetického pole a termodynamiky. Ze všech takto zkonstruovaných výrazů mne zvláště zaujal jeden, jenž byl z hlediska jednoduchosti Wienovu výrazu zdaleka nejbližší a jenž má tvar (9).

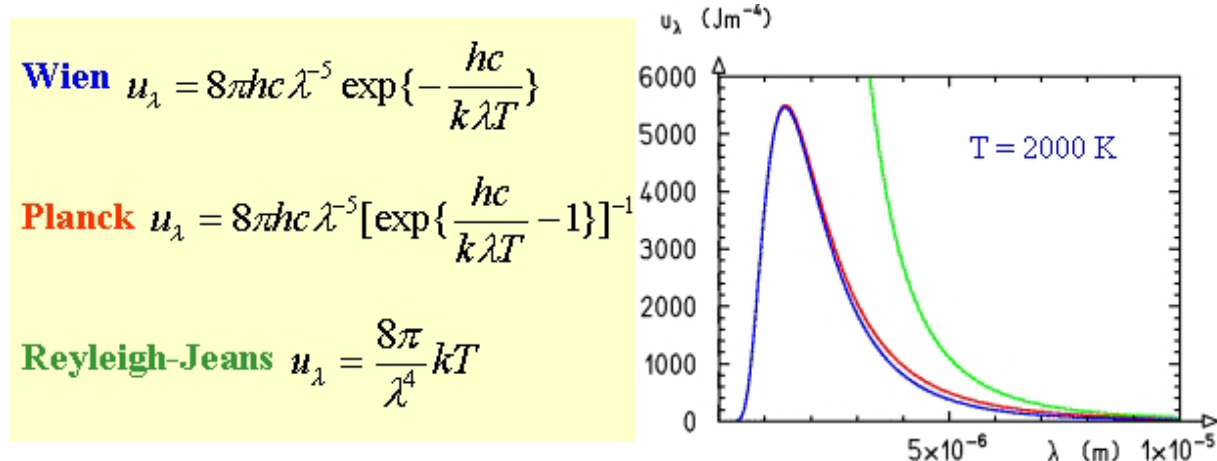
Integrací (9) totiž dostaneme

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE} = \frac{1}{\beta v} \ln\left(1 + \frac{\gamma}{E}\right) \Rightarrow S = \frac{\gamma}{\beta v} \left[\left(\frac{E}{\gamma} + 1\right) \ln\left(\frac{E}{\gamma} + 1\right) - \frac{E}{\gamma} \ln \frac{E}{\gamma} \right] \quad (10)$$

z čehož plyne vyzařovací zákon ve tvaru

$$E(\nu, T) = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} \Rightarrow u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{\exp(h\nu/kT)} \quad (11)$$

kde jsme položili $\gamma = h\nu$, aby (11) přešlo pro malá $E \ll \gamma$ na Wienův tvar (7). Všimněme si, že pro velká $E \gg \gamma$ E vede (9) na velmi jednoduchý tvar $1/T = dS/dE = k/E$, jenž implikuje $E = kT$. Tento výraz navrhl v květnu 1900 lord Rayleigh vycházející z tzv. ekvipartičního teorému statistické fyziky. Tento teorém je právě ona „osvědčená výpočetní metoda“, o níž



Obr. 4: Srovnání Wienova, Planckova a Rayleigh-Jeansova vyzařovacího zákona. Na grafu vpravo je jasné vidět, že v oblasti malých vlnových délek je Wienův zákon velmi dobrou aproximací Planckovy formule.

píše Greene. Ve skutečnosti se Planckovy úvahy ubíraly zcela jiným směrem a o Rayleighově práci Planck pravděpodobně nevěděl. Statistická fyzika mu do té doby nebyla blízká. Je třeba také zdůraznit, že Rayleigh netvrdil, že jeho formule má platit pro všechny vlnové délky a s ohledem na data sám navrhl její modifikaci pro oblast, kde platí Wienův zákon.

Planck si dobře uvědomoval, že výše nastíněné odvození, jenž přednesl na zasedání německé fyzikální společnosti v prosinci 1900, byla jen interpolace mezi dvěma režimy a následujících několik týdnů se proto usilovně snažil najít pro formuli (11) nějaké teoretické opodstatnění.

Akt zoufalství

K tomu mu byl každý postup dobrý. Jak říká v dopise R. Woodovi z roku 1931 „*Nějaký její teoretický obsah bylo nutné najít za každou cenu.*“ V nouzi nejvyšší se obrátil k tomu, co mu bylo dosud cizí: statistické fyzice a Boltzmanově definici entropie jako míry pravděpodobnosti jednotlivých mikroskopických stavů systému

$$S = k \ln W \quad (12)$$

kde k je již zmíněná Boltzmanova konstanta. V práci ze 7. ledna 1901 uvažuje systém N resonátorů s celkovou energií E . Energie jednotlivých resonátorů není ovšem libovolně malá, ale může nabývat jen celočíselných násobků konečné hodnoty ε a tedy platí $E = P\varepsilon$. V statistické fyzice odpovídá rovnovážný makroskopický stav stavu s maximální pravděpodobností výskytu a ta je úměrná počtu mikroskopických stavů, které mají stejnou energii $E = P\varepsilon$. Planck si z teorie pravděpodobnosti vypůjčil vzorec pro počet kombinací P dílů ε celkové energie E , rozdělených mezi N resonátorů ve tvaru

$$R(N, P) = \frac{(N + P - 1)!}{(N - 1)! P!} \doteq \frac{(N + P)^{N+P}}{N^N P^P} \quad (13)$$

kde pro velká N a P použil Stirlingovu formuli $N! \doteq N^N$. Dosazením do (12) pak dostal

$$S = k \left[\left(\frac{E}{\varepsilon} + 1 \right) \ln \left(\frac{E}{\varepsilon} + 1 \right) - \frac{E}{\varepsilon} \ln \frac{E}{\varepsilon} \right] \quad (14)$$

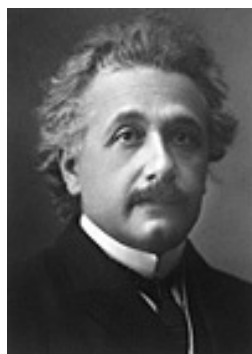
a protože entropie je funkcí podílu E/ν musí být $\varepsilon = h\nu$, kde h je konstanta. Po této substituci tak Planck dospěl k tomu, po čem tak toužil, tj. výrazu (10). O kvantu energie ε , jež hraje v postupu klíčovou roli, Planck v dopise Woodovi říká:

Byl to čistě formální předpoklad a moc důležitosti jsem mu nepřikládal. Šlo mi jen o to, že jsem za každých okolností, ať to stálo co to stálo, musel dojít ke kladnému výsledku.

Svůj postup pak shrnul slovy: *Krátce řečeno, celou věc lze označit za akt zoufalství.*

Planck měl pravdu, jeho odvození mělo vážný nedostatek, na něj upozornil Einstein a obsahovalo také z tehdejšího hlediska nepochopitelný krok. Tím byl předpoklad, že zatímco resonátory jsou rozlišitelné, kvanta energie nikoliv. Jedině v tom případě má pravděpodobnost $R(N, P)$ tvar (13). Ve výraze pro rozlišitelná kvanta totiž chybí ve jmenovateli klíčový faktoriál $P!$ Nerozlišitelnost objektů je ovšem pojem, jenž v klasické fyzice nemá místo.

Sám voják v poli

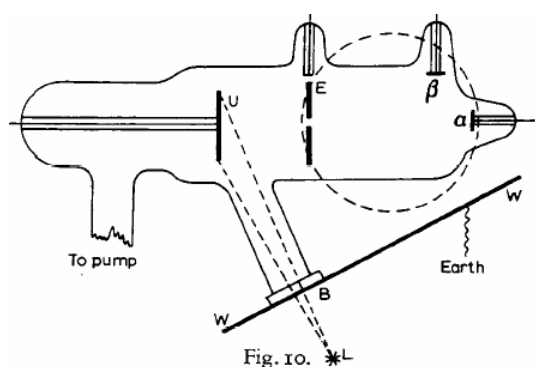


Role Einsteina při formulaci kvantové teorie se obvykle uvádí v souvislosti s vysvětlením fotoefektu, ale jeho vliv byl daleko větší. V jistém smyslu je pravda, že to byl právě Einstein, kdo první pochopil hloubku změn, které Planckova hypotéza kvanta energie přinesla. Na rozdíl od Plancka byl Einstein od počátku své kariéry velkým stoupencem metod statistické fyziky, o níž se opírají prakticky všechny jeho úvahy věnované mikrosvětlu.

Kritický pohled na Planckovo odvození formule (11) se týkal role, jakou v něm hrálo kvantum energie $\varepsilon = h\nu$. Samotná existence minimální

hodnoty energie záření dané frekvence by nebyla tak velkým zlomem, pokud by tato hodnota byla malá ve srovnání se střední hodnotou energie oscilátoru, který ji vyzařuje, tedy pokud by platilo $E \gg \varepsilon = h\nu$. V oblasti frekvencí a teplot, kde platí Wienův zákon (4), je tomu však právě naopak $E \ll \varepsilon = h\nu$! Například pro vlnovou délku 0.5 mikronů a teplotu 1700 K je střední energie oscilátoru 65 milionkrát menší než kvantum $\varepsilon = h\nu$, jež vyzařuje! Pro rozdělení veličiny, která nabývá hodnot 0, $\varepsilon = h\nu$ a jeho celočíselné násobky, je taková střední hodnota klasicky naprosto nepochopitelná. **Zavedení kvanta energie tedy není jen diskretizace klasicky spojitě veličiny, ale dramatická změna samé podstaty zákonů popisujících působení elektromagnetického záření a hmotných částic.** Na rozdíl od Plancka, jenž chápal kvantum energie jako veličinu charakterizující systém oscilátorů, Einstein pojem kvanta aplikoval i na spektrum jednoho samotného oscilátoru.

Důležitý rozdíl mezi Einsteinem a Planckem byl také v tom, že Einstein vyšetřoval vlastnosti elektromagnetického záření bez odkazu na oscilátory, jež ho v Planckově přístupu generovaly. Teplotu a entropie považoval za charakteristiky samotného záření a jeho spektrální hustotu se snažil získat z úvah o závislosti entropie záření na objemu. Ukázal, že entropie odpovídající Wienovu zákonu znamená, že se záření chová zhruba jako statistický systém tvořený částicemi o energii $\varepsilon = h\nu$. **Einstein tak dospěl ke kvantu energie, aniž použil Planckův zákon, podobně jako naopak Planck nejprve odvodil svůj zákon bez hypotézy kvanta energie.**



Obr. 5: Zařízení pomocí něhož Lenard studoval vlastnosti katodového záření vzniklého ozařováním katody U ultrafialovým světlem ze zdroje L. Měněním napětí na elektrodě E Lenard měřil maximální energii elektronů vyražených z katody U.

hodnotu intenzity nebude v důsledku toho energie světelné vlny dopadající do objemu atomu na vyražení elektronu stačit. Přesto data ukazovala, že i při velmi malé intenzitě světlo elektrony vyrazí, byť četnost takových případů klesá. Tento experimentální fakt uvádí Einstein jako jeden z argumentů pro svoji revoluční myšlenku týkající se podstaty světla:

Vlnová teorie světla pracující se spojitými funkcemi prostorových souřadnic se skvěle osvědčila při popisu čistě optických jevů a v tom ji žádná jiná teorie určitě nenahradí. Je ovšem třeba mít na paměti, že optická pozorování se týkají časových středních hodnot, nikoliv okamžitých hodnot fyzikálních veličin. Navzdory experimentálnímu potvrzení vlnové teorie světla při jevech ohybu, odrazu a lomu lze si docela dobře představit, že teorie světla pracující se spojitými prostorovými veličinami povede k rozporu s experimentem v případech popisu produkce a přeměny světla.

S odvoláním na vlastnosti záření absolutně černého tělesa, fotoefekt a fotoluminiscenci pak Einstein dodává, že tyto jevy lze lépe pochopit za předpokladu, že

při šíření z jednoho bodu se energie světelného paprsku nerozděluje na stále rostoucí prostorový objem, ale sestává se z konečného počtu prostorově lokalizovaných kvant energie, které se pohybují, aniž se dále dělí a mohou být také jen jako celky pohlceny.

Konkrétně pro popis fotoefektu Einstein v této práci postuloval pro energii elektronu vyraženého z povrchu materiálu světlem o frekvenci ν výraz

$$E = h\nu - p \quad (15)$$

kde p představuje konstantní energii potřebnou k uvolnění elektronu z látky. Experimentální prověření tohoto vztahu, především pak lineární závislosti energie vyraženého elektronu na frekvenci dopadajícího světla, trvalo 10 let a bylo završeno pracemi Roberta Millikana, jenž

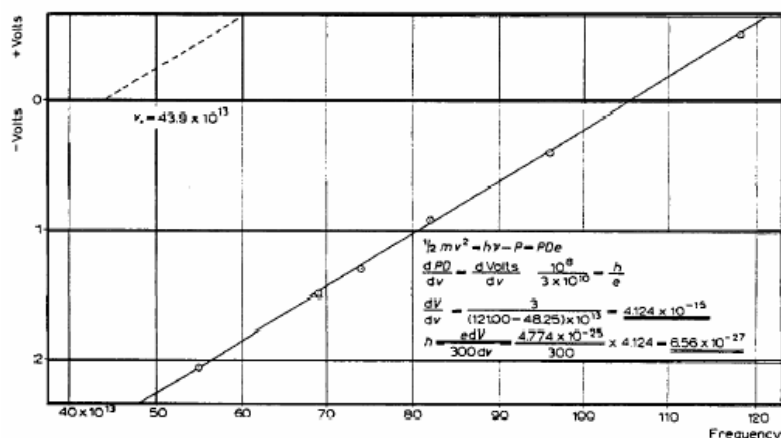


Fig. 6: Závislost maximální hodnoty kinetické energie vyražených elektronů (veličina na ose y, úměrná napětí na elektrodě E z obr. 5), na frekvenci dopadajícího ultrafialového záření. Z nobelovské přednášky Roberta Millikana.

v roce 1915 nade vše pochybnost prokázal správnost vztahu (15), z něhož lze přesně určit h .

Einstein však šel při popisu světla ještě dál. Pomocí úvah o tlaku elektromagnetického záření dospěl k mimořádně důležitému závěru, že kvantum světla nese jen energii, ale je i prostorově orientováno, jinými slovy, že nese i hybnost. K tomuto, na první pohled a z našeho dnešního hlediska triviálnímu závěru (co má energii, musí mít přece i hybnost), však Einstein dospěl až po 12 letech. Velmi dobře si totiž uvědomoval,

co to znamená: odpovědět na otázku, co rozhoduje o směru výletu konkrétního kvanta světla při deexcitaci atomů.

Na rozdíl od speciální teorie relativity, již předložil v témže roce 1905 a jež byla prakticky okamžitě a všemi přijata, Einsteinova hypotéza kvant světla měla velmi těžký život. Trvalo skoro 20 let, než fyzikální obec pod tíhou experimentálních dat se skřípěním zubů přijala, že Einstein měl i v tomto případě pravdu. Příznačná jsou například slova Plancka, Rubense a dalších vedoucích osobností německé fyziky na adresu Einsteinovy hypotézy kvanta světla v dopise doporučujícím jeho přijetí do Pruské Akademie věd v roce 1913 :

Skutečnost, že občas ve svých spekulacích přestřelí, jako to učinil například ve své hypotéze kvantování světelné energie, by mu neměla být příliš vyčítána.

Ještě vyhraněnější postoj k této hypotéze měl Robert Millikan, jehož měření Einsteinovu teorii fotoefektu potvrdila. Ten v roce 1914 na adresu Einsteinovy teorie rezolutně prohlásil:

Stojíme tváří v tvář udivující skutečnosti, že tato fakta (tj. Millikanova měření, pozn. J.Ch.) byla před devíti lety správně předpovězena kvantovou teorií, jež však byla mezi tím všeobecně opuštěna. V roce 1905 Einstein při popisu fotoefektů navrhl odvážnou, ba přímo šílenou myšlenku, že světlo se chová jako korpuskule o energii $h\nu$, jež je absorbována elektronem... Ale teorie, kterou Einstein dospěl k rovnici (15) se dnes zdá být naprosto neudržitelná.

A ještě v roce 1924 v nobelovské přednášce Millikan o Einsteinově hypotéze napsal:

Platnost Einsteinovy rovnice je dnes všeobecně přijímána a v tomto smyslu lze považovat za experimentálně potvrzenou i realitu Einsteinových světelných kvant. Ale pojem lokalizovaných kvant světla, z něhož Einstein svou rovnicí odvodil, je stále nutno považovat za sporný.

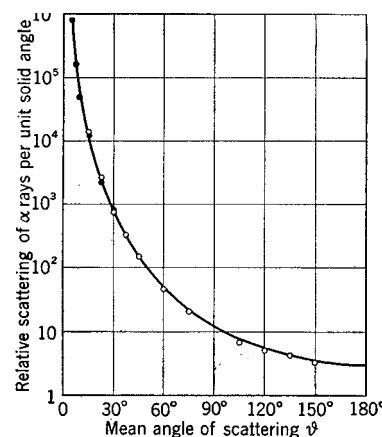
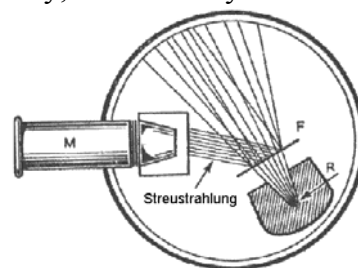
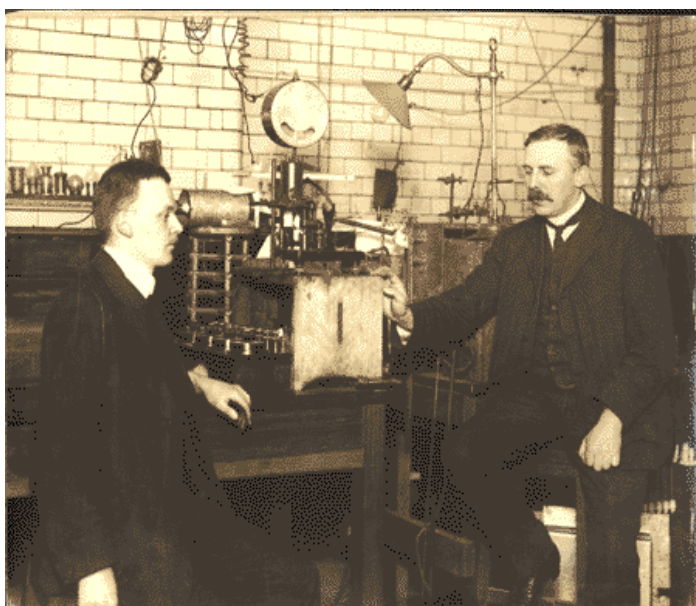
K Einsteinově hypotéze kvanta světla se ve své nobelovské přednášce vrací i sám Planck:

Co se stane s energií fotonu poté, co byl zcela vyzářen? Šíří se všemi směry jako vlny v Huyghensově teorii a zaujímá tak stále více prostoru a přitom se tlumí? A nebo vylétne jako projektil v jednom směru jako v Newtonově teorii? V prvním případě by kvantum nemohlo koncentrovat v jednom bodě prostoru tolik energie, aby dokázalo vyrazit elektron z atomu a v druhém by musel být obětován hlavní triumf Maxwellovy teorie naše současné chápání dobře prozkoumaných interferenčních jevů – oba pro dnešní teoretiky nevídané důsledky.

Uspokojující odpověď na tuto otázku však bude fyzika hledat dlouho. Ještě dříve, než byly poslední pochybnosti o realitě světelných kvant a správnosti Einsteinovy teorie vyvráceny, došlo ovšem k dalšímu klíčovému kroku na cestě k pochopení struktury hmoty.

Objev atomového jádra

Tím krokem byl objev atomového jádra, který učinil Rutherford se svými asistenty Geigerem a Marsdenem v roce 1911. Pomocí velmi jednoduchého zařízení zachyceného na obr. 7 zkoumali úhlové rozdělení částic alfa, které vyletovaly z kapsle radia a rozptylovaly se na fólii ze zlata a dalších prvků. Podle tehdejších představ o struktuře hmoty, formulovaných v rámci



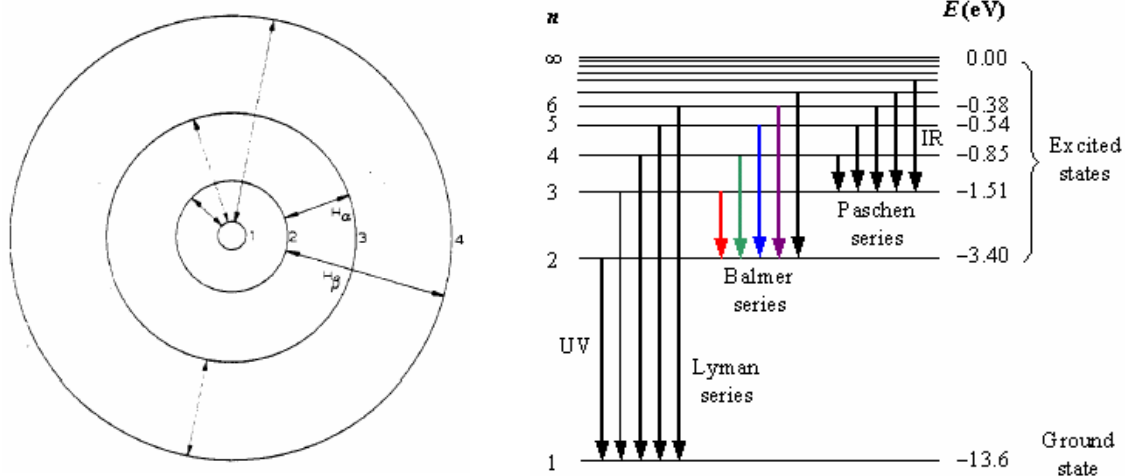
Obr. 7: Rutherford s Geigerem při měření (nahore) a schéma jejich aparatury (vpravo nahore). Výsledné úhlové rozdělení rozptýlených elektronů zachycené na grafu vpravo dole svědčí o tom, že kladný elektrický náboj je v atomu zlata koncentrován ve velmi malém jádru o poloměru menším než 30 fm.

Thomsonova modelu, byly záporně nabitě elektrony v atomu obklopeny spojitě a homogenně rozloženou kladně nabitou hmotou, zhruba jako rozinky v pudinku. Od pokusů Thomsona bylo také známo, že kladně nabitá hmota v atomu musela být asi 1800 krát těžší než elektrony v něm vázané. Na základě tohoto modelu a za použití Newtonových rovnic bylo možné spočítat tvar úhlového rozdělení rozptýlených elektronů. Předpověděné rozdělení při rostoucím úhlu rozptylu strmě klesalo s tím, že počet případů rozptylu na velké úhly byl zanedbatelný.

Rozdělení, které Rutherford, Geiger a Marsden naměřili, bylo ovšem s tímto očekáváním v hrubém rozporu a částic rozptýlených na velké úhly bylo daleko více, než předpovídal Thomsonův model. Podrobná analýza dat ukázala, že naměřené rozdělení odpovídá tomu, že veškerá kladně nabitá hmota atomu je soustředěna ve velmi malém objemu, zhruba odpovídající kouli o poloměru 30 femtometrů. To je asi tisíckrát menší vzdálenost, než je poloměr atomu zlata. Tato experimentální skutečnost vedla k formulaci planetárního modelu atomu, v němž elektrony obíhají kolem těžkého, prakticky stacionárního jádra, podobně jako planety kolem Slunce. Na rozdíl od planetární soustavy však atomy vykazovaly některé vlastnosti, jež byly v rámci klasické fyziky zcela nepochopitelné.

Bohrův model atomu

Základním problémem bylo pochopit stabilitu atomů a skutečnost, že všechny atomy daného prvku jsou naprosto stejné. Zatímco u planetární soustavy připouštějí Newtonovy pohybové



Obr. 8: Vlevo geometrické uspořádání stacionárních drah v nejjednodušší verzi Bohrova modelu atomu vodíku, vpravo spektrum energií příslušných těmto stacionárním drahám. Šipkami jsou naznačeny přechody mezi nimi, jež odpovídají třem pozorovaným sériím spektrálních čar.

rovnice oběžné dráhy s libovolným poloměrem (pro jednoduchost uvažujeme jen kruhové), skutečnost, že všechny atomy daného prvku mají zcela stejné vlastnosti, svědčí o tom, že zákony, jimiž se řídí atomy, takovou libovůli nepřipouštějí. Ze zákonů klasické mechaniky a Maxwellovy teorie elektromagnetismu dále plyne, že obíhající elektrony by měly neustále vyzařovat elektromagnetické vlny, jež by při tom spojitě měnily svou vlnovou délku.

V důsledku ztráty energie by se měl elektron pohybovat po spirále, až by nakonec spadl na jádro. Protože nic takového nenastává, je zjevné, že zákony klasické mechaniky a elektromagnetismu v atomech neplatí. Tento závěr byl druhým pramenem kvantové teorie. Její základní principy formuloval v roce 1913 mladý dánský teoretik Niels Bohr takto:

- Mezi všemi klasicky možnými stavy atomů existuje určitý počet tzv. stacionárních stavů, jež navzdory tomu, že se na nich elektrony řídí klasickými pohybovými zákony, mají zvláštní, mechanicky nevysvětlitelnou vlastnost stability. Jakákoliv změna pohybu elektronů spočívá v úplném přechodu z jednoho stacionárního stavu do druhého.
- Ačkoliv v rozporu s klasickou teorií elektrony při pohybu po stacionárních drahách nevyzařují, přechod mezi dvěma stacionárními stavy je doprovázen vyzářením kvant elektromagnetického záření. Jeho frekvence však nemá žádný jednoduchý vztah k frekvenci oběhu elektronů po těchto stacionárních drahách, ale je dána vztahem $h\nu = E^k - E^j$, kde h je Planckova konstanta a E^k, E^j jsou energie dvou stacionárních, mezi nimiž k přechodu do-

šlo. Také obráceně, při ozáření atomu elektromagnetickým zářením této frekvence dojde k jeho absorpci doprovázené opačným přechodem mezi stacionárními stavy.

Jak vidíme, v obou případech jde o modifikace klasických zákonů, jejichž jediným cílem bylo „vysvětlení“ klasicky nevysvětlitelných vlastností elektronů a elektromagnetického záření. Planck Bohrovy postuláty ve své nobelovské přednášce v roce 1918 charakterizoval slovy:

Jádro Bohrova modelu atomu je tvořeno řadou předpokladů, které by před dvaceti lety byly každým fyzikem rázně odmítnuty. Skutečnost, že v atomu hrají zvláštní roli některé zcela určitým způsobem vybrané orbity, by ještě šlo přijmout, ale daleko méně to, že elektrony při pohybu po těchto oběžných drahách vůbec nevyzařují. Myšlenka, že by se frekvence vyzářovaných fotonů měly lišit od oběhových frekvencí elektronů, se pak musí zdát každému fyzikovi s klasickým vzděláním na první pohled monstrózní a naprosto nepřijatelná.

Ještě krkolomnější byla procedura, pomocí níž Bohr určil energie stacionárních stavů. Z klasické mechaniky využil vztah mezi velikostí celkové energií E elektronu o hmotnosti m obíhajícího s frekvencí ω po kružnici o poloměru r kolem jádra s elektrickým nábojem Ze , jenž plyne z rovnosti mezi přitažlivou silou jádra a odstředivou silou obíhajícího elektronu

$$\frac{Ze^2}{r^2} = m\omega^2 r \Rightarrow E = \frac{Ze^2}{2r}, \quad \omega = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{E^{3/2}}{\pi Ze^2} \quad (16)$$

V klasické fyzice jsou možné všechny orbity, ale jakmile zvolíme jejich poloměr, je příslušná energie i frekvence jednoznačně určena a obráceně.

Při stanovení parametrů stacionárních stavů uvažoval Bohr následovně. Elektron si představoval na počátku daleko od jádra a s nulovou oběžnou frekvencí. Při postupném vázání se elektron přibližuje k jádru a frekvence jeho oběhu spojitě roste. Klasicky by přitom elektron měl vyzářovat elektromagnetické záření se spojitě se měnící frekvencí. Bohruv postuloval, že elektron vyzářuje pouze celočíselné násobky kvanta energie dané výrazem $h\nu$, kde $\nu = \omega/2$ je rovna polovině klasické frekvence oběhu na orbitě, na níž se elektron přejde. Vyzářená energie je tedy rovna $nh\omega/2$, kde n je celé číslo. Dosazením výrazu pro klasickou frekvenci ω z (16) do rovnice $E = nh\omega/2$ a jejím vyřešením dostal hledané energie stacionárních stavů, příslušné oběhové frekvence a poloměry hodnoty

$$E_n = \frac{2\pi^2 Z^2 e^4 m}{n^2 h^2}, \quad \omega_n = \frac{4\pi^2 Z^2 e^4 m}{h^3 n^3}, \quad r_n = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 Z e^2 m} \quad (17)$$

Onu polovinu ve výrazu pro vyzářovanou energii Bohr odůvodnil tím, že jde o střední hodnotu počáteční a koncové klasické oběhové frekvence: $\omega/2 = (0 + \omega)/2$. Jak se ukázalo, tento krok, jenž byl veden snahou zachovat určitý vztah klasické oběhové frekvence s frekvencí vyzářovaného záření, vede ke správnému výsledku pro přechod volného elektronu do jednoho ze stacionárních stavů, ale nikoliv pro přechod mezi obecnými dvěma stavy. Z hlediska klasické fyziky byl Bohruv postup krajně neuspokojivý, neboť mimo jiné nic neříkal o tom, kdy se kvanta záření vyzářují. Bohr sám si problematičnost svého odvození (18) uvědomoval a proto již v prvním článku „kvantovou“ podmínku $E = nh\omega/2$ interpretoval ještě jiným způsobem, a to jako podmínku na orbitální moment hybnosti M elektronu. Pro kruhovou oběžnou dráhu platí totiž jednoduchý vztah mezi tímto momentem hybnosti a celkovou energií E elektronu

$$M = \frac{E}{\pi\omega} = \frac{nh\omega}{2\pi\omega} = n \frac{h}{2\pi} = nM_0 \quad (18)$$

a tedy slovy Bohra „moment hybnosti elektronu ve stacionárních stavech je rovný celočíselnému násobku universální veličiny M_0 , jež je nezávislá na náboji jádra“. Takto formulovaná

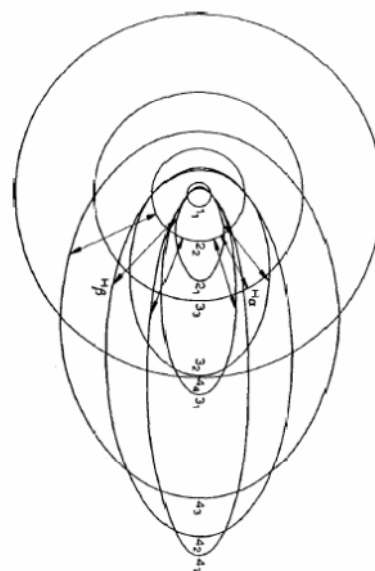
podmínka kvantování byla daleko přijatelnější a také předznamenala budoucí argumenty založené na myšlence vln de Broglieho.

Po celé další desetiletí Bohr ve spolupráci s Arnoldem Sommerfeldem svůj model rozpracovával a rozšiřoval na atomy s více elektrony a molekuly, přičemž uvažoval i eliptické dráhy a vzájemné působení elektronů na oběžných drahách.



Arnold Sommerfeld
(1868-1951)

Niels Bohr
(1885 - 1962)
Nobelpreis 1922



Obr. 9: Hlavním příspěvkem Sommerfelda při budování modelu atomu bylo podrobné započtení eliptických drah, znázorněných vpravo, jež vedlo k zavedení dvou dalších kvantových čísel (vedle toho, co se dnes nazývá „hlavní“ kvantové číslo vystupující ve vztahu (17).

Most ke klasické fyzice

Bohrův model atomu založený na „staré“ kvantové teorii Plancka a Einsteina si vynutil dramatický odklon od pojmů a zákonů klasické fyziky. Při jeho pochopení sehrál důležitou roli tzv. princip korespondence, jenž se týká okolností, za nichž se chování kvantového systému blíží klasickým zákonům. Pro výše uvažovaný případ elektronu vázaného v poli kladného náboje tento princip znamená, že ve stacionárních stavech s velkým n se elektrony chovají skoro klasicky. Skutečně, rozdíl energií dvou takových hodně excitovaných stavů

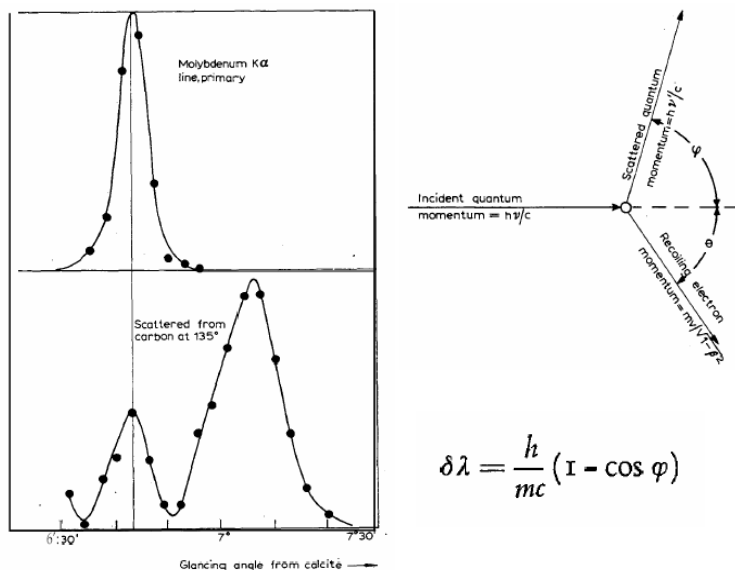
$$E_n - E_{n+1} = \frac{2\pi^2 Z^2 e^4 m}{n^2 h^2} - \frac{2\pi^2 Z^2 e^4 m}{(n+1)^2 h^2} \doteq \frac{4\pi^2 Z^2 e^4 m}{n^3 h^2} = h \frac{4\pi^2 Z^2 e^4 m}{n^3 h^3} = h\omega_n \ll E_n \quad (19)$$

je rovný klasické frekvenci oběhu elektronu a malý vůči oběma energiím.

Konec pochybností

V roce 1923 provedl mladý americký fyzik Arthur Compton sérii experimentů, jež učinily konec pochybnostem o opodstatněnosti Einsteinovy hypotézy, že kvanta elektromagnetické záření nesou nejen energii, ale i hybnost. Einstein sám se k této interpretaci probíjovoval přes deset let a ačkoliv vysvětlení fotoefektu se bez ní neobešlo, přesvědčivý důkaz stále chyběl. Přinesly ho právě až experimenty, v nichž Compton ozařoval rentgenovými paprsky o vlnové délce cca 1 Angström = 10^{-8} cm uhlíkový terč a měřil jejich vlnovou délku po rozptylu na zvolený úhel. Zjistil, že po rozptylu jsou rentgenové paprsky měkčí než primární a že příslušný rozdíl přesně odpovídá předpovědi, založené na předpokladu, že rentgenové paprsky nesou hybnost, jejíž absolutní hodnota je rovna $h\nu/c$. Frekvence rozptýleného paprsku přitom závi-

sela na úhlu rozptylu tak, jak plynulo ze zákona zachování energie a hybnosti v procesu rozptylu rentgenových paprsků na elektronu z atomu uhlíku. Compton kromě toho detegoval odražený elektron a změřil jeho hybnost. I ta byla v soulase s předpovědí založenou na před-



Obr. 10: Vlevo dole spektrum rozptýleného fotonu rentgenovského záření získané A. Comptonem. Na ose x je veličina úměrná vlnové délce rozptýleného fotonu, na ose y jeho intenzita. První pik odpovídá rozptylu na jádře a nachází se proto při stejné vlnové délce jako primární foton, jehož spektrum vyneseno vlevo nahoře. Zákon zachování energie a hybnosti má za následek, že vlnová délka rozptýleného fotonu je větší než vlnová délka primárního fotonu o hodnotu (uvedenou vpravo dole), jež závisí na úhlu rozptylu.

stavě, že jde o proces pružného rozptylu dvou částic. V roce 1927 byly Comptonovy práce oceněny Nobelovou cenou. Je ovšem zajímavé a velmi zvláštní, že Compton ve svých pracích Einsteina vůbec necituje a hovoří pouze o „kvantové teorii rozptylu“.

Pauli a jeho vylučovací princip

Na přelomu let 1924 a 1925, ještě před formulací „nové“ kvantové teorie Heisenbergem a Schrödingerem, formuloval 24letý Wolfgang Pauli princip, na jehož platnosti je založena struktura elektronových slupek v atomech a tím pádem i existence molekul a hmoty vůbec. Ještě před tím, v pouhých 20 letech, Pauli napsal rozsáhlý přehledný článek o teorii relativity, jímž udělal velký dojem i na samotného Einsteina.



Wolfgang Pauli
(1900-1958)

Objev vylučovacího principu byl vyústěním Pauliho snah pochopit množství experimentálních dat o jemné struktuře spektrálních čar vodíku, lithia a dalších prvků a o rozštěpení těchto čar ve vnějším magnetickém poli. Oba tyto jevy se nedařilo vysvětlit s pomocí tehdy známých charakteristik elektronů, jež v rámci Bohrova modelu atomu popisovaly jejich radiální a orbitální pohyb. Situaci, v níž se fyzika tehdy octla, dobře vystihuje příhoda z podzim roku 1922, kdy byl Pauli u Bohra v Kodani. Při jednom bezcílém bloumání Kodaní potkal Pauliho Bohrovův otec a přátelsky poznamenal: *Vypadáte nějak nešťastně*, na což prý Pauli odsekl *Jak má člověk vypadat šťastně, když přemýšlí o anomálním Zeemanově efektu*.

Pauli vyřešil problém rozštěpení spektrálních čar ve dvou krocích. Nejdříve pro pochopení složité struktury rozštěpených spektrálních čar zavedl „zvláštní, klasicky nepopsatelnou zdvojenost kvantových vlastností elektronu“, což je v dnešním jazyce spin elektronu, a konstatoval, že experimentálně pozorovaná „Dubletní struktura spekter alkalických prvků je způsobena zvláštní dvojnásobností elektronových stavů“. Za druhé, na základě experimentálních dat o uzavřených energetických hladinách – známých jako „magická čísla“ - vyslovil princip, že každý stav elektronu charakterizovaný všemi kvantovými čísly, včetně této dvojnásobnosti, **může být obsazen pouze jedním elektronem**. Vylučovací princip byl na světě.

Epilog

„Stará“ kvantová teorie, spojená se jmény Plancka, Einsteina, Bohra a Pauliho, učinila při opuštění rámce klasické fyziky zásadní krok, ale byl to krok přece jen polovičitý. Experimentální data sice jasně ukazovala, že ve světě atomů klasické zákony neplatí, ale fyzikové stále používali základní pojmy klasické fyziky, jako je dráha a poloha částic. Nic jiného jim až do roku 1925 ostatně ani nezbývalo.

Situace se zásadně změnila v roce 1925, kdy nejdříve Heisenberg přišel s tzv. maticovou mechanikou a krátce nato Schrödinger s vlnovou mechanikou. Obě tyto teorie, jež se brzy ukázaly být ekvivalentní, zcela opustily rámec klasické fyziky a zavedly dva nové pojmy, na nichž je postavena kvantová teorie dodnes: pravděpodobnost přechodu mezi stacionárními stavy a vlnová funkce. „Nová“ (nerelativistická) kvantová teorie ovšem přinesla nejen nové pojmy, ale také dobře definovaný matematický rámec, založený na Schrödingerově rovnici. Řešení této rovnice v řadě aspektů reprodukovala předpovědi Bohrova modelu atomu, ale přinesla i některé zcela nové výsledky. Heisenbergovy relace neurčitosti, v nichž vystupuje Planckova konstanta, pak umožnily pochopit omezení použitelnosti klasických pojmů polohy a hybnosti v mikrosvětě. V roce 1927 pak Dirac formuloval relativisticky invariantní rovnici, jež nese jeho jméno, která se stala základem pro popis částic s poločíselným spinem, jako je elektron.